Sociedad Matemática Mexicana
Delegación Baja California Sur

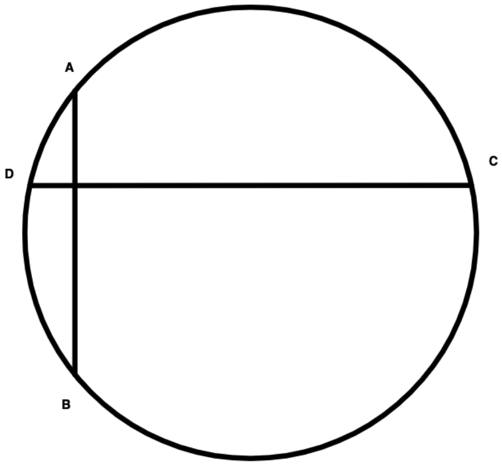
1. Llamaremos $R(k)$ a un número formado por k números uno; es decir, $R(1) = 1$, $R(2) = 11$, $R(3) = 111$, y así sucesivamente. Encuentra el número de ceros que aparecen en el número que resulta de dividir el número $R(144)$ entre el número $R(4)$.

2. En el mágico país de Matelandia existen nueve criaturas llamadas *Toninos*. Los Toninos siempre andan por la ciudad en grupos de tres. El mago Deeds se asomó un día por la ventana y comenzó a tomar fotos a los grupos de Toninos que pasaban por su casa. Al término del día observó que cada pareja posible de Toninos aparecía en una de las fotos que tomó y que el número de fotos tomadas era el mínimo que cumplía esta propiedad. ¿Cuántas fotos tomó Deeds?

3. En el Día de la Amistad, Cris distribuye sus dulces de acuerdo a la siguiente regla: su primer amigo recibe la vigésima tercera parte de los dulces que Cris tiene y uno más, el segundo amigo recibe la vigésima tercera parte de los dulces que le quedan a Cris y dos dulces más, el tercer amigo recibe la vigésima tercera parte de lo que queda a Cris y tres dulces más y así sucesivamente. Al finalizar el día, Cris ha entregado a sus amigos todos sus dulces y todos ellos recibieron la misma cantidad. ¿Cuántos amigos tiene Cris y cuántos dulces le tocó a cada uno?

4. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$ un subconjunto de diez elementos de los primeros cien números naturales, tal que $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Para cada uno de los subconjuntos de A con siete elementos se selecciona el número más grande. Definimos *el peso* de A como la suma de todos estos números seleccionados. Demuestra que dentro de todos los posibles conjuntos A, el mayor de los pesos que se puedan obtener menos el menor de los pesos que se puedan obtener es múltiplo de 90.

5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, de modo que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son perpendiculares.



Pruebe que $|\overline{AD}|^2 + |\overline{CB}|^2 = 4r^2$.

6. Una cuadrícula de $n \times n$ se llama *coloreable* si teniendo n colores diferentes se cumplen las dos siguientes condiciones:

   - Cada cuadrito se pinta de un sólo color.
   - En cada columna, fila o diagonal, no hay dos cuadritos pintados del mismo color.

   Determina cuáles de las cuadrículas 2×2, 3×3, 4×4 y 5×5 son coloreables.

7. Sea ABC un triángulo y D un punto fuera de él tal que $\measuredangle CAB + \measuredangle ABD = 180^{\circ}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$. Demuestre que $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$.

8. Determine todos los enteros positivos a, b, c, d con $a < b < c < d$ tales que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

   sea un entero.