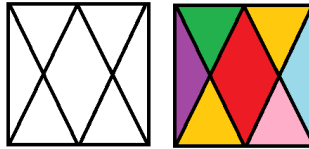


# Examen Coahuilense 2021

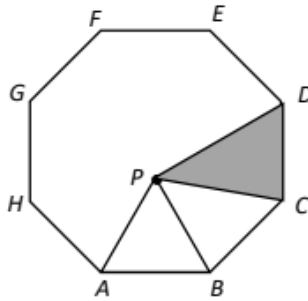
Nivel III - Prueba Individual

## PARTE A

1. La siguiente figura muestra un mosaico, dividido en 7 regiones. Se tienen 6 colores para pintarlo, de manera que se usen todos los colores, y que dos regiones que compartan un lado deban ser pintadas de diferentes colores. ¿De cuántas maneras se puede pintar el mosaico? (**Nota:** la otra figura muestra una posible manera de colorear el mosaico)

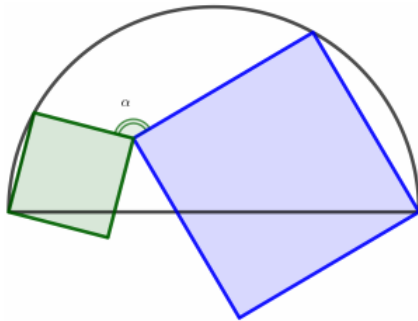


2. En la siguiente figura se tiene un octágono regular  $ABCDEFGH$  de área 1, y un triángulo equilátero  $ABP$ . Calcular el valor del área sombreada del triángulo  $CDP$ .

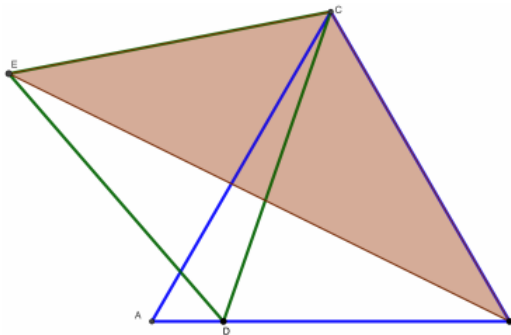


3. Paolita escribió todos los números de tres dígitos. Después borró todos los números, tales que la suma de sus dígitos era un cubo perfecto. ¿Con cuántos números se quedó Paolita?
4. ¿Cuál es el primer dígito diferente de 0 de derecha a izquierda de  $20 \times 21!$ ?
5. Si  $p$  y  $q$  son las dos soluciones de la ecuación  $x^2 - 2021x + 1 = 0$ . Calcular el número formado por los dos últimos dígitos de  $(p + q)^4 - (pq)^4$ .

6. En la siguiente figura se tiene un semicírculo con dos cuadrados como se muestra en la figura. Determine la medida del ángulo  $\alpha$ .



7. En la siguiente figura, los triángulos  $EDC$  y  $ABC$  son equiláteros y el triángulo equilátero más grande tiene por área 8. Determine el área de  $\triangle CEB$ .



8. Un número lo llamamos *virtual* si se tiene que la suma de sus dígitos es igual al número de dos dígitos formado por sus dos dígitos de la izquierda. ¿Cuántos números de 5 dígitos son *virtuales*?
9. ¿Cuántos números de cuatro cifras cumplen que al multiplicar el número formado por sus primeras dos cifras con el número formado por sus últimas dos cifras se obtiene un múltiplo de 385?
10. Carolina y Jairo juegan al clásico juego del gato. Carolina comienza y escribe una X, luego Jairo escribe una O. Ellos juegan alternadamente escribiendo X u O, según sea el caso, en algún espacio en blanco. Como se sabe, el primero en obtener 3 de sus letras en línea recta (horizontal, vertical o diagonal) gana. ¿De cuántas maneras posibles puede terminar el juego, si al final Carolina gana en su cuarto movimiento? **Nota: a) No supongas que los jugadores tienen una estrategia b) No se está pidiendo que se enlisten todos los finales posibles.**
11. Un punto  $P$  es marcado en el interior del hexágono regular  $ABCDEF$  tal que  $\angle BAP = \angle PCD = 42^\circ$ . ¿Cuánto vale  $\angle ABP$ ?

---

12.  $a, b$  y  $c$  son números que obedecen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}a^2b + 2ab^2 + c^3 &= 2 \\a^3 + 2a^b + ab^2 + b^3 &= 999 \\a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 &= 17\end{aligned}$$

Resulta que el valor de  $a + b + c$  es un entero positivo de tres dígitos. Encuentra la suma de esos tres dígitos

---

## PARTE B

13. Bernardo escoge 6 números diferentes  $a, b, c, d, e, f$  de la lista de enteros  $\{2, 3, 4, \dots, n\}$ , de forma que  $a \cdot b \cdot c = d \cdot e \cdot f$ . ¿Cuál es el menor valor de  $n$  que le permite a Bernardo realizar esto?
14. La distancia entre las ciudades  $A$  y  $B$  es de 1000 millas. Hay 3000 manzanas en  $A$ , y las manzanas deben entregarse a  $B$ , por lo que el transporte para llevar las manzanas es un coche con capacidad de 1000 manzanas como máximo. El conductor del automóvil ha desarrollado una adicción a las manzanas: cuando tiene manzanas a bordo, come 1 manzana por cada milla recorrida. Si en cada milla hay un cesto donde puedes colocar algunas manzanas, descubre la estrategia que produzca la mayor cantidad de manzanas para entregar a  $B$ .
15.  $ABCD$  es un cuadrilátero convexo con medidas  $AB = 1, AC = x$  y  $AD = x^2$ . Además,  $AC$  es bisectriz interna del ángulo  $\angle DAB$ . Prueba que el circuncentro del triángulo  $BCD$  está sobre la línea perpendicular a  $AC$  que pasa por  $A$ .