

33<sup>a</sup> Olimpiada Mexicana de Matemáticas  
Concurso Nacional

Ciudad de México, 11 de noviembre de 2019  
Primer día



**Problema 1.**

Un número entero  $m \geq 1$  es *mexica* si es de la forma  $n^{d(n)}$ , donde  $n$  es un entero positivo y  $d(n)$  es la cantidad de enteros positivos que dividen a  $n$ . Encuentra todos los números mexicas menores que 2019.

*Nota.* Los divisores de  $n$  incluyen a 1 y a  $n$ ; por ejemplo  $d(12) = 6$ , ya que 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son todos los divisores positivos de 12.

**Problema 2.**

Sean  $H$  el ortocentro del triángulo acutángulo  $ABC$  y  $M$  el punto medio de  $AH$ . La recta  $BH$  corta a  $AC$  en  $D$ . Considera un punto  $E$  de manera que  $BC$  sea mediatriz del segmento  $DE$ . Los segmentos  $CM$  y  $AE$  se cortan en  $F$ . Muestra que  $BF$  es perpendicular a  $CM$ .

**Problema 3.**

Sea  $n \geq 2$  un número entero. Considera  $2n$  puntos alrededor de una circunferencia. Cada vértice ha sido etiquetado con un entero del 1 al  $n$ , inclusive, y cada uno de estos enteros ha sido usado exactamente 2 veces. Isabel divide los puntos en  $n$  parejas, y traza los  $n$  segmentos entre dichas parejas, con la condición de que estos no se intersecan. Luego, a cada segmento le asigna el número mayor entre las dos etiquetas en sus extremos.

- Muestra que, sin importar cómo se hayan etiquetado los puntos, Isabel puede escoger las parejas de tal forma que se usen exactamente  $\lceil n/2 \rceil$  números para etiquetar a los segmentos.
- ¿Pueden etiquetarse los puntos de tal forma que, sin importar cómo Isabel divida los puntos en parejas, siempre se usen exactamente  $\lceil n/2 \rceil$  números para etiquetar los segmentos?

*Nota.* Para cada número real  $x$ ,  $\lceil x \rceil$  denota el menor entero mayor o igual que  $x$ . Por ejemplo,  $\lceil 3.6 \rceil = 4$  y  $\lceil 2 \rceil = 2$ .

Cada problema vale 7 puntos.  
Tiempo máximo del examen 4 horas y media.



Olimpiada Mexicana de  
Matemáticas